

Skalarprodukt – Zusammenfassung

Im Folgenden gelte stets: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und $a, b, r, s \in \mathbb{R}$
Definition des Skalarproduktes:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1)$$

Kommutativität, Distributivität und Linearität:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (2)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad (3)$$

$$\vec{a} \cdot (s \cdot \vec{b}) = (s \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} \quad (4)$$

$$\vec{a} \cdot (r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}) = r \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{a} \cdot \vec{c} \quad (5)$$

Fehlende Assoziativität:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad (6)$$

Quadrat eines Vektors:

$$\vec{a}^2 := \vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \quad (7)$$

Länge eines Vektors:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (8)$$

Einheitsvektor:

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{a} \cdot \vec{a} \quad (9)$$

$$\vec{a} = a \cdot \vec{a}^0 \quad (10)$$

Skalarprodukt zwischen zwei kollinearen Vektoren:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm ab \quad , \text{ wenn } \vec{a} \parallel \vec{b}. \quad (11)$$

Skalarprodukt zwischen zwei orthogonalen(zueinander senkrechten) Vektoren:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad , \text{ wenn } \vec{a} \perp \vec{b} \quad (12)$$

Skalarprodukt für beliebige Winkel:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) \quad (13)$$

