

Kurvenrekonstruktion 1

Aufgabe 1 – Aus Zwei mach Eins

Das Profil zweier nahe nebeneinander stehender Hügel werde durch je eine Parabel beschrieben:

$$P_l(x) = h - k \cdot (x + m)^2, \quad x < 0$$

$$P_r(x) = h - k \cdot (x - m)^2, \quad x > 0$$

mit $h, k, m \in \mathbb{R} > 0$

Wir möchten dieses Hügel-Profil gerne durch eine einzige Funktion näherungsweise beschreiben. Dazu scheint uns ein Polynom vierten Grades geeignet. Weil die Hügel symmetrisch um die y -Achse angeordnet sind, versuchen wir es gleich mit einem geraden Polynom:

$$f(x) = a + b \cdot x^2 + d \cdot x^4$$

Als Interpolationsbedingung verlangen wir, daß die neue Funktion $f(x)$ die Hügel-Parabeln $P_l(x)$ und $P_r(x)$ jeweils in ihren Scheitelpunkten berühren¹ und dort auch dieselbe Krümmung aufweisen soll. Bestimme nun die Parameter a, b und c so, daß diese Anforderungen erfüllt werden.

Zur Kontrolle: Für die spezielle Wahl der Konstanten $h = 8, k = \frac{4}{5}, m = 4$ lautet das Ergebnis: $a = \frac{24}{5}, b = \frac{2}{5}, c = -\frac{1}{80}$. Zeichne die Parabeln und die Funktion $f(x)$ mit diesen Werten in ein Koordinatensystem (x - und y -Achse jeweils im Intervall von -8 bis $+8$).

¹Zur Erinnerung: Wenn zwei Funktionen sich in einem Punkt *berühren*, so schneiden sie sich in diesem Punkt und nehmen dort auch die selbe Steigung an.

