

Kurvendiskussion

Aufgabe 1

Führe eine vollständige Kurvendiskussion der Funktion $f(x) = x \cdot e^{-x^2/2}$ durch.

- Untersuche die Funktion $f(x)$ dazu zunächst auf Symmetrie.
- Bestimme die Nullstellen x_0 von $f(x)$.
- Berechne die Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$.
- Gib die Extrempunkte und Wendestellen von $f(x)$ an.
- Weise nach, daß gilt $F(x) = e^{-x^2/2}$ und bestimme damit die uneigentlichen Integrale

$$I_1 = \int_0^{+\infty} f(x) \, dx \quad \text{und} \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx.$$

- Bestimme die quadratische Schmiegeparabel $g_s(x)$ zum im ersten Quadranten liegenden Maximum von $f(x)$.
- Skizziere die Graphen von $f(x)$ und $g_s(x)$ im Intervall $[-5; 5]$.

Lösungen:

- Es gilt $f(x) = f(-x)$ also ist $f(x)$ punktsymmetrisch zum Ursprung.
- Es existiert nur eine Nullstelle bei $x = 0$.
- $f'(x) = (1 - x^2) \cdot e^{-x^2/2}$ und $f''(x) = x \cdot (x^2 - 3) \cdot e^{-x^2/2}$
- Max($1 \mid 1/\sqrt{e}$), Min($-1 \mid -1/\sqrt{e}$). Wendestellen bei $x = 0$ und $x = \pm\sqrt{3}$
- Beweis: Ableitung von $F(x)$ ist gleich $f(x)$. $I_1 = 1$ und wegen der Punktsymmetrie gilt: $I_2 = 0$.
- Ansatz: $g_s(x) = ax^2 + bx + c$.

Aus den Bedingungen $f''(x) \stackrel{!}{=} g_s''(x)$, $f'(x) \stackrel{!}{=} g_s'(x)$ und $f(x) \stackrel{!}{=} g_s(x)$ folgt:
 $2a = -2/\sqrt{e}$ sowie $2a + b = 0$ und $a + b + c = 1/\sqrt{e}$.

Einsetzen liefert dann: $g_s(x) = -x^2/\sqrt{e} + 2x/\sqrt{e}$.

