Kurvendiskussion

Aufgabe 1

Führe eine vollständige Kurvendiskussion der Funktion $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x^2/2}$ durch.

a) Untersuche die Funktion $f(x)$ dazu zunächst auf Symmetrie.

b) Bestimme die Nullstellen x_0 von $f(x)$.

c) Berechne die Ableitungen $f'(x)$ und $f'(x)$.

d) Gib die Extrempunkte und Wendestellen von $f(x)$ an.

e) Weise nach, daß gilt $F(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$ und bestimme damit die uneigentlichen Integrale

$$I_1 = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

f) Bestimme die quadratische Schmiegeparabel $g_s(x)$ zum im ersten Quadranten liegenden Maximum von $f(x)$.

g) Skizziere die Graphen von $f(x)$ und $g_s(x)$ im Intervall $[-5;\ 5]$.

Lösungen:

a) Es gilt $f(x) = f(-x)$ also ist $f(x)$ punktsymmetrisch zum Ursprung.

b) Es existiert nur eine Nullstelle bei $x = 0$.

c) $f'(x) = (1 - x^2) \cdot \mathrm{e}^{-x^2/2}$ und $f''(x) = x \cdot (x^2 - 3) \cdot \mathrm{e}^{-x^2/2}$

d) $\mathrm{Max}(1 \mid 1/\sqrt{\mathrm{e}})$, $\mathrm{Min}(-1 \mid -1/\sqrt{\mathrm{e}})$. Wendestellen bei $x = 0$ und $x = \pm\sqrt{3}$

e) Beweis: Ableitung von $F(x)$ ist gleich $f(x)$. $I_1 = 1$ und wegen der Punktsymmetrie gilt: $I_2 = 0$.

f) Ansatz: $g_s(x) = ax^2 + bx + c$.
Aus den Bedingungen $f''(x) \stackrel{!}{=} g_s''(x)$, $f'(x) \stackrel{!}{=} g_s'(x)$ und $f(x) \stackrel{!}{=} g_s(x)$ folgt:
$2a = -2/\sqrt{\mathrm{e}}$ sowie $2a + b = 0$ und $a + b + c = 1/\sqrt{\mathrm{e}}$.
Einsetzen liefert dann: $g_s(x) = -x^2/\sqrt{\mathrm{e}} + 2x/\sqrt{\mathrm{e}}$.